Ecuaciones Diferenciales I Examen XVIII

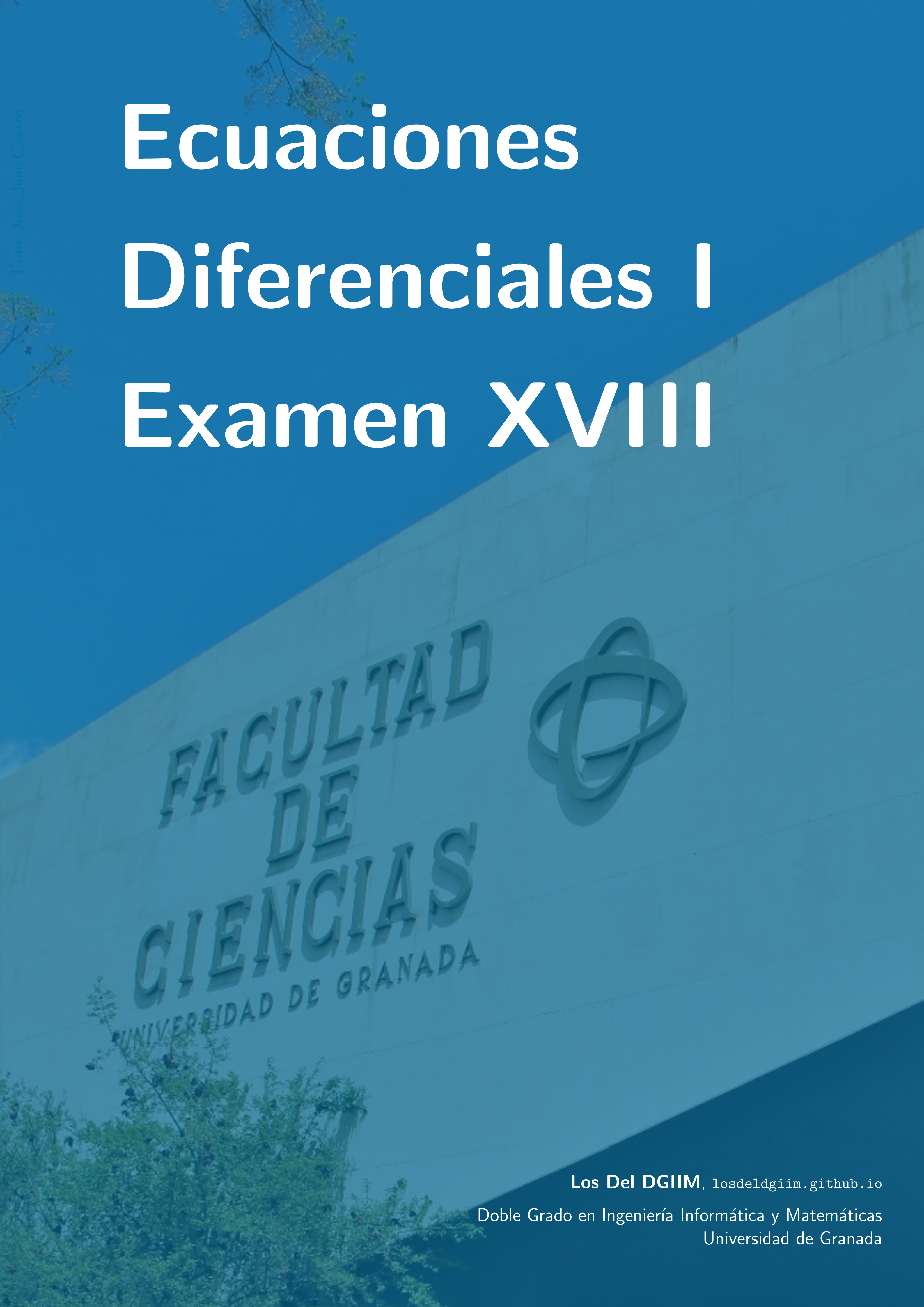

Foto: José Juan Castro

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Ecuaciones Diferenciales I Examen XVIII

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Arturo Olivares Martos

Granada, 2024-2025

Asignatura Ecuaciones Diferenciales I

Curso Académico 2016-17.

Grupo A.

Profesor Rafael Ortega Ríos.

Descripción Parcial C.

Fecha 1 de Junio de 2017.

Ejercicio 1. Encuentra la solución del problema

$$x'' + 9x = t^2, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 0$$

Busquemos una solución particular de la forma $x_p(t) = \alpha t^2 + \beta t + \gamma$. Tenemos que:

$$\begin{aligned} x_p'(t) &= 2\alpha t + \beta, \\ x_p''(t) &= 2\alpha. \end{aligned}$$

Por tanto, como buscamos que sea solución, hemos de imponer:

$$2\alpha + 9(\alpha t^2 + \beta t + \gamma) = t^2 \Longrightarrow 9\alpha t^2 + 9\beta t + 9\gamma + 2\alpha = t^2 \Longrightarrow \left\{\begin{aligned} 9\alpha &= 1, \\ 9\beta &= 0, \\ 9\gamma + 2\alpha &= 0. \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{aligned} \alpha &= 1/9, \\ \beta &= 0, \\ \gamma &= -2/81. \end{aligned}\right\}$$

Por tanto, una solución particular del problema es:

$$x_p(t) = \frac{t^2}{9} - \frac{2}{81} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Busquemos ahora la solución de la homogénea. Sus valores propios son:

$$\lambda^2 + 9 = 0 \Longrightarrow \lambda = \pm 3i.$$

Trabajando con el valor propio $\lambda = 3i$, tenemos que una solución compleja de la homogénea es:

$$x(t) = e^{3i} = \cos(3t) + i \operatorname{sen}(3t) \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Por tanto, la solución general de la homogénea es:

$$x(t) = c_1 \cos(3t) + c_2 \operatorname{sen}(3t) \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Por tanto, la solución general del problema es:

$$x(t) = c_1 \cos(3t) + c_2 \operatorname{sen}(3t) + \frac{t^2}{9} - \frac{2}{81} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Imponiendo las condiciones iniciales, tenemos que:

$$\begin{aligned} x(0) &= c_1 - \frac{2}{81} = 0 \Longrightarrow c_1 = \frac{2}{81}, \\ x'(t) &= -3c_1 \operatorname{sen}(3t) + 3c_2 \cos(3t) + \frac{2t}{9}, \\ x'(0) &= 3c_2 = 0 \Longrightarrow c_2 = 0. \end{aligned}$$

Por tanto, la solución del problema es:

$$x(t) = \frac{2}{81} \cos(3t) + \frac{t^2}{9} - \frac{2}{81} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Ejercicio 2. Sea Z el espacio de soluciones del sistema $x' = Ax$ donde A es la matriz 2×2

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Consideramos la aplicación lineal $\Psi : Z \to \mathbb{R}^2$, $\Psi(x) = (x_1(0), x_2(1))$. Encuentra $\ker \Psi$.

Tenemos que:

$$\ker \Psi = \{x \in Z : \Psi(x) = 0\} = \{x \in Z : x_1(0) = 0, x_2(1) = 0\}.$$

El sistema podemos escribirlo como:

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2, \\ x_2' &= 0. \end{aligned}$$

Por tanto, tenemos que toda solución $x_2(t)$, al ser de clase 1 en $\mathbb{R}$ y tener derivada nula, es constante. Por la condición inicial, tenemos que:

$$x_2(t) = x_2(1) = 0 \qquad t \in \mathbb{R}.$$

De igual forma, tenemos que:

$$x_1' = 0 \Longrightarrow x_1(t) = x_1(0) = 0 \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Por tanto, tenemos que:

$$\ker \Psi = \{x \in Z : x_1(t) = 0, x_2(t) = 0\} = \{0\}.$$

Ejercicio 3. Demuestra que la función

$$\chi(t) = \begin{vmatrix} t^2+1 & t^2+2 & t^2+3 & \dots & t^2+n \\ t^3+1 & t^3+2 & t^3+3 & \dots & t^3+n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t^n+1 & t^n+2 & t^n+3 & \dots & t^n+n \\ t^{n+1}+1 & t^{n+1}+2 & t^{n+1}+3 & \dots & t^{n+1}+n \end{vmatrix}$$

es derivable y calcula $\chi'(0)$.

Como cada componente de la matriz es un polinomio en t, cada componente es derivable en todo $\mathbb{R}$, luego χ es derivable en todo $\mathbb{R}$, con derivada:

$$\chi'(t) = \begin{vmatrix} 2t & 2t & \dots & 2t \\ t^3+1 & t^3+2 & \dots & t^3+n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t^n+1 & t^n+2 & \dots & t^n+n \\ t^{n+1}+1 & t^{n+1}+2 & \dots & t^{n+1}+n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} t^2+1 & t^2+2 & \dots & t^2+n \\ 3t^2 & 3t^2 & \dots & 3t^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t^n+1 & t^n+2 & \dots & t^n+n \\ t^{n+1}+1 & t^{n+1}+2 & \dots & t^{n+1}+n \end{vmatrix} + \dots$$

$$+ \dots + \begin{vmatrix} t^2+1 & t^2+2 & \dots & t^2+n \\ t^3+1 & t^3+2 & \dots & t^3+n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t^n+1 & t^n+2 & \dots & t^n+n \\ (n+1)t^n & (n+1)t^n & \dots & (n+1)t^n \end{vmatrix}$$

Por tanto, evaluando en el punto $t = 0$, tenemos que $\chi'(0) = 0$, ya que cada determinante tendrá una fila de ceros.

Ejercicio 4. Demuestra que la sucesión de funciones $\{f_n\}$ converge uniformemente en el intervalo $[0,1]$ si $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ está definida por las fórmulas recursivas

$$f_0(t) = 7, \quad f_{n+1}(t) = 7 + \int_0^t \sqrt{s^2+t^2} f_n(s)ds.$$

Para ello, usaremos el Test de Weierstrass. Veamos que:

$$\begin{aligned}
|f_1(t) - f_0(t)| &= \left| \int_0^t \sqrt{s^2+t^2} f_0(s)ds \right| \\
&= \left| 7 \int_0^t \sqrt{s^2+t^2} ds \right| \leqslant 7 \left| \int_0^t \sqrt{2t^2} ds \right| \\
&= 7\sqrt{2} \cdot t^2 \leqslant 7\sqrt{2}. \\
|f_2(t) - f_1(t)| &= \left| \int_0^t \sqrt{s^2+t^2} (f_1(s) - f_0(s))ds \right| \\
&\leqslant 7\sqrt{2} \left| \int_0^t \sqrt{s^2+t^2} ds \right| \leqslant 7(\sqrt{2})^2 \left| \int_0^t t ds \right| \leqslant 7(\sqrt{2})^2 \cdot \left| \int_0^t ds \right| = 7(\sqrt{2})^2 t. \\
|f_3(t) - f_2(t)| &= \left| \int_0^t \sqrt{s^2+t^2} (f_2(s) - f_1(s))ds \right| \\
&\leqslant 7(\sqrt{2})^2 \left| \int_0^t \sqrt{s^2+t^2} s ds \right| \leqslant 7(\sqrt{2})^3 \cdot \left| \int_0^t s ds \right| = 7(\sqrt{2})^3 \frac{t^2}{2}.
\end{aligned}$$

Demostremos por inducción que:

$$|f_{n+1}(t) - f_n(t)| \leqslant 7(\sqrt{2})^{n+1} \frac{t^n}{n!}.$$

- Para $n = 0$, tenemos que:

$$|f_1(t) - f_0(t)| \leqslant 7(\sqrt{2})^1 \frac{t^0}{0!}.$$

- Supongamos cierto para n, y veamos que es cierto para $n+1$. Tenemos que:

$$\begin{aligned}
|f_{n+2}(t) - f_{n+1}(t)| &= \left| \int_0^t \sqrt{s^2+t^2} (f_{n+1}(s) - f_n(s))ds \right| \\
&\leqslant 7(\sqrt{2})^{n+1} \left| \int_0^t \sqrt{s^2+t^2} s ds \right| \leqslant 7(\sqrt{2})^{n+2} \cdot \left| \int_0^t \frac{s^n}{n!} ds \right| = \\
&= 7(\sqrt{2})^{n+2} \frac{t^{n+1}}{(n+1)!}.
\end{aligned}$$

Por tanto, tenemos que:

$$|f_{n+1}(t) - f_n(t)| \leqslant 7(\sqrt{2})^{n+1} \frac{t^n}{n!} \leqslant 7\sqrt{2} \cdot \frac{(\sqrt{2})^n}{n!} \qquad t \in [0,1].$$

Definimos entonces la sucesión de números reales:

$$M_n = 7\sqrt{2} \cdot \frac{(\sqrt{2})^n}{n!} \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Veamos ahora que la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} M_n$ converge. Para ello, usando el desarrollo en serie de Taylor de la función exponencial, tenemos que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} M_n = 7\sqrt{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\sqrt{2})^n}{n!} = 7\sqrt{2}e^{\sqrt{2}} < \infty.$$

Por tanto, por el Test de Weierstrass, la sucesión de funciones $\{f_n\}$ converge uniformemente en el intervalo $[0,1]$.

Ejercicio 5. Dado un sistema lineal y homogéneo $x' = A(t)x$ con $A : I \to \mathbb{R}^{N\times N}$ continua, se considera una matriz solución $\Phi : I \to \mathbb{R}^{N\times N}$. Demuestra que el rango de la matriz $\Phi(t)$ es independiente de t.

Sea $\Phi = (\phi_1 \mid \cdots \mid \phi_N)$, con ϕ_i la columna i-ésima de Φ una solución del sistema. Veamos que el rango de $\Phi(t)$ es el número de soluciones linealmente independientes de Φ, y que por tanto no depende de t.

Sea Z el espacio de soluciones del sistema. Consideramos el subespacio vectorial de las combinaciones lineales de las columnas de Φ:

$$V = \left\{\sum_{i=1}^{N} c_i\phi_i \mid c_i \in \mathbb{R}\ \forall i \in 1 = 1,\dots,n\right\}.$$

de esta forma, $\dim V$ es el número de soluciones linealmente independientes de Φ.

Fijado $t_0 \in I$, consideramos el isomorfismo dado por:

$$\begin{array}{rccc} \Phi_{t_0}: & Z & \longrightarrow & \mathbb{R}^N \\ & x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} & \longmapsto & x(t_0) = \begin{pmatrix} x_1(t_0) \\ \vdots \\ x_N(t_0) \end{pmatrix} \end{array}$$

Por ser Φ_{t_0} lineal, tenemos que:

$$\Phi_{t_0}(V) = \left\{\sum_{i=1}^{N} c_i\Phi_{t_0}(\phi_i) \mid c_i \in \mathbb{R}\ \forall i \in 1 = 1,\dots,n\right\}.$$

De esta forma, tenemos que:

$$\Phi(t_0) = (\Phi_{t_0}(\phi_1) \mid \cdots \mid \Phi_{t_0}(\phi_N)) \Longrightarrow \mathrm{rg}(\Phi(t_0)) = \mathrm{rg}(\Phi_{t_0}(\phi_1) \mid \cdots \mid \Phi_{t_0}(\phi_N))$$

La matriz $(\Phi_{t_0}(\phi_1) \mid \cdots \mid \Phi_{t_0}(\phi_N))$ ya es una matriz en cuyas columnas hay vectores de $\mathbb{R}^N$, por lo que su rango es el número de columnas linealmente independientes, y como $\Phi_{t_0}(V)$ es el espacio vectorial formado por las combinaciones lineales de los vectores de dicha matriz, tenemos que:

$$\mathrm{rg}(\Phi(t_0)) = \mathrm{rg}(\Phi_{t_0}(\phi_1) \mid \cdots \mid \Phi_{t_0}(\phi_N)) = \dim \Phi_{t_0}(V)$$

No obstante, como Φ_{t_0} es un isomorfismo, tenemos que $\dim \Phi_{t_0}(V) = \dim V$, y por tanto:

$$\text{rg}(\Phi(t_0)) = \dim V$$

Como t_0 es arbitrario, tenemos que:

$$\text{rg}(\Phi(t)) = \dim V \qquad \forall t \in I.$$

Por lo que hemos demostrado que es independiente de t.